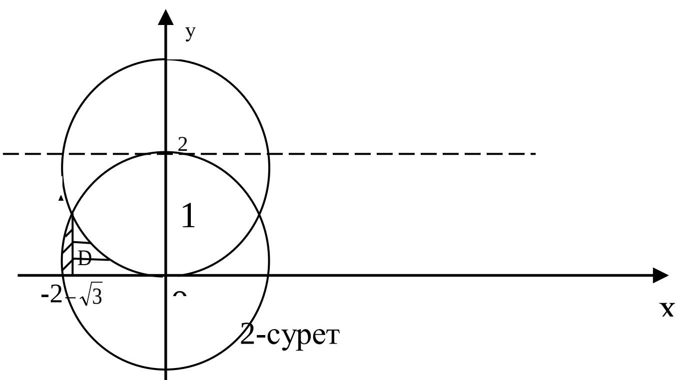
5.3 Есеп шығару үлгілері

Есеп №1. Интегралдау ретін өзгертіңіз.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

Шешуі. Облыстың шекараларының теңдеулерін жазып алайық.. $x=-2$, $x=-\sqrt{3}$ - Оу осіне параллель түзулер. x=0 - Оу осінің теңдеуі .y=0 - Ох осінің теңдеуі. $y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$ - центрі (0;0) нүктесінде, радиусы R=2 болатын шеңбердің теңдеуі. Ал $y=\sqrt{4-x^2}$ - шеңбердің Ох осінен жоғарғы орналасқан бөлігі.

$y=2-\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y-2=-\sqrt{4-x^2} \Rightarrow (y-2)^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$ - центрі (0,2) нүктесінде, радиусы R=2 болатын шеңбердің теңдеуі. $y=2-\sqrt{4-x^2}$ - y=2 түзуінен төмен орналасқан бөлігі. Берілген шеңберлердің қиылысу нүктесі. Берілген шеңберлердің 2- ші ширекте жатқан қиылысу нүктесінің абсциссасы $x=-\sqrt{3}$-ке тең, сәйкес ординатасы $y=\sqrt{4-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4-3}=1$ $\quad A=\left(-\sqrt{3},\ 1\right)$.



2-сурет

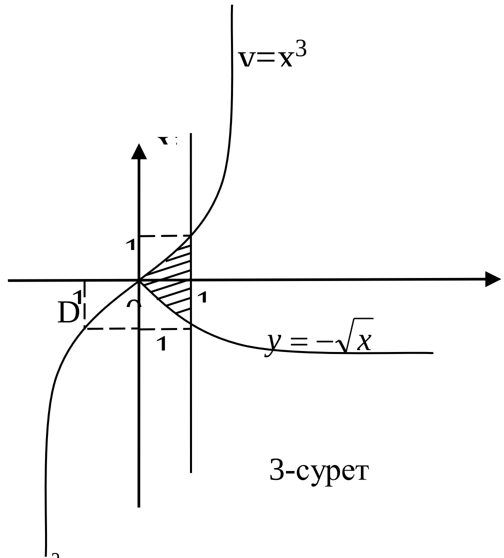
Шеңберлердің теңдеулерінен x айнымалысын y айнымалысы арқылы өрнектеп, аламыз: $x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2=4-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$ $\quad x=-\sqrt{4-y^2}$, өйткені, облыс 2-ширекте орналасқан. $x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow x^2 = 4-(y-2)^2 \Rightarrow x^2=4-y^2+4y-4 \Rightarrow x^2=4y-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4y-y^2} \Rightarrow$ $x=-\sqrt{4y-y^2}$, өйткені, облыс 2-ширекте орналасқан.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dy$$

Жауабы: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx \cdot$

Есеп №2. Есептеңіз: $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$ $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$

Шешуі. D облысының шекарасын беретін теңдеулерден облысты салайық.



3-сурет

$D:\{0\le x\le 1;\ -\sqrt{x}\le y\le x^3\}$ теңсіздіктермен көрсетілген D облысы бойынша қайталанған интегралға келтіріп, есептейміз:

$$\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3}\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(54x^2\frac{y^3}{3}+150x^4\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3}dx=\int\limits_0^1\left[18x^2x^9+30x^4x^{15}-\left(-18x^2x^{\frac{3}{2}}-30x^4x^{\frac{5}{2}}\right)\right]dx=$$

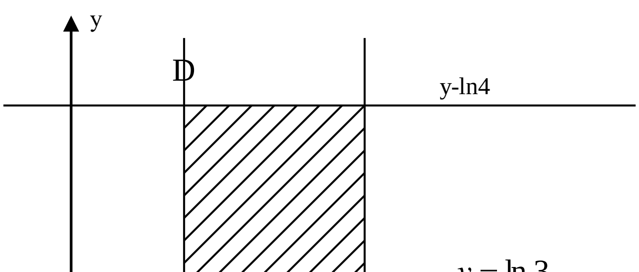
$$=\int\limits_0^1\left(18x^{11}+30x^{19}+18x^{\frac{7}{2}}+30x^{\frac{13}{2}}\right)dx=\left(\frac{18x^{12}}{12}+\frac{30x^{20}}{20}+\frac{18x^{\frac{9}{2}}\cdot 2}{9}+\frac{30x^{\frac{15}{2}}\cdot 2}{15}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+4+4=11$$

Жауабы: $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=11.$

Есеп №3. Есептеңіз: $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy$ $D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{6},\ \ x=\frac{1}{3}$

Шешуі. D облысының шекарасын беретін теңдеулерден облыстың қабырғалары координата осьтеріне параллель болатын тік төртбұрыш формасында және интегралдау шекаралары сандар болатынын ескеріп, геометриялық кескінін салайық. Бұл жағдайда интегралдау ретін өзімізге тиімді болатындай таңдап аламыз.



4-сурет

$$\iint_D 12ye^{6xy}dxdy = 12\int_{\ln 3}^{\ln 4} ydy\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} e^{6xy}dx = 2\int_{\ln 3}^{\ln 4} dy\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} e^{6xy}d(6xy) = 2\int_{\ln 3}^{\ln 4} \ell^{6xy}\Big|_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} dy =$$

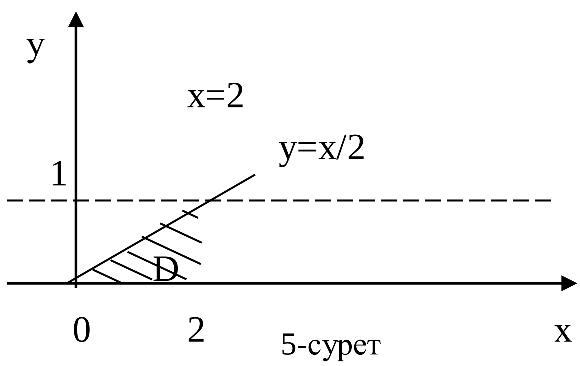
$$= 2\int_{\ln 3}^{\ln 4}\left(e^{2y} - e^{y}\right)dy = 2\left(\frac{1}{2}e^{2y} - e^{y}\right)\Big|_{\ln 3}^{\ln 4} = 2\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4} - e^{\ln 4} - \frac{1}{2}e^{2\ln 3} + e^{\ln 3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}e^{\ln 16} - 4 - \frac{1}{2}e^{\ln 3^2} + 3\right) = 16 - 8 - 9 + 6 = 5$$

Жауабы: $\iint_D 12ye^{6xy}dxdy = 5$.

Есеп №4. Есептеңіз: $\iiint_V x^2 sh(xy)dxdydz$. V: x=2, $y = \frac{x}{2}$, y=0, z=0, z=1.

Шешуі. V денесі призма формасындағы бес жазықтықпен шектелген дене болады. Үш еселі интегралды Oxy жазықтығындағы проекциясы бойынша қайталанған интегралға келтіріп, есептейміз.



5-сурет

$$\iiint_V x^2 shxydxdydz = \int_0^2 x^2dx \int_0^{\frac{x}{2}} shxydy \int_0^1 dz = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} shxy \;\; z\Big|_0^1 dy =$$

$$= \int_0^2 x^2dx\int_0^{\frac{x}{2}} shxydy = \int_0^2 x^2 \frac{chxy}{x}\Big|_0^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 x\left(ch\frac{x^2}{2} - ch0\right)dx = \int_0^2 x\left(ch\frac{x^2}{2}-1\right)dx =$$

$$= \int_0^2 xch\frac{x^2}{2}dx - \int_0^2 xdx = \int_0^2 ch\frac{x^2}{2}\, d\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = sh\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - 2 = sh2 - sh0 - 2 = sh2-2.$$

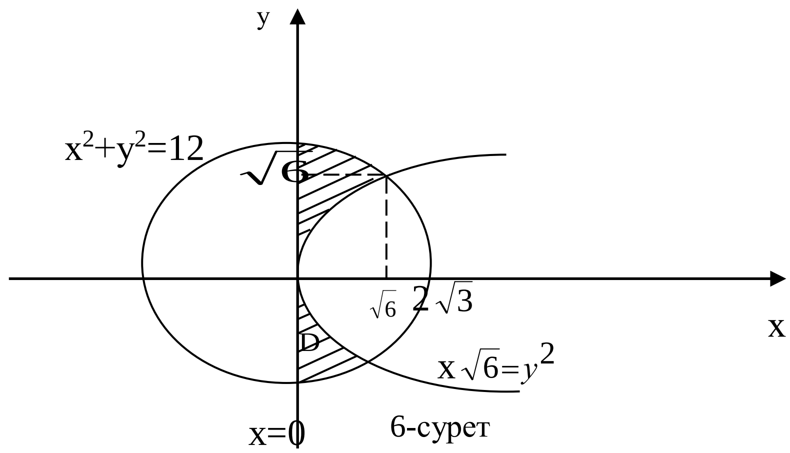
Жауабы: $\iiint_V x^2 sh(xy)dxdydz = sh2-2$.

Есеп №5. $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$, $x\geq 0$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

Шешуі. D облысының шекарасын беретін теңдеулерден облысты салып, оның Ox осіне қарағанда симметриялы екендігін ескеріп, Ox осінің жоғарғы бөлігіндегі ауданды есептеп, 2-ге көбейтеміз. $x^2+y^2=12$ - (0;0) нүктесі центрі болатын, радиусы $R=2\sqrt{3}$ болатын шеңбер, $x\sqrt{6}=y^2$ -парабола.

Қиылысу нүктелерін анықтаймыз: $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ x\sqrt{6}=y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+x\sqrt{6}-12=0$, D=6+48=54

$x_{1,2}=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{6}}{2}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6}\end{array}\right.$.Облыстың жоғарғы бөлігі үшін $\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$



6-сурет

$$S=2\iint\limits_D dxdy=2\left(\int_0^{\sqrt6}dy\int_0^{\frac{y^2}{\sqrt6}}dx+\int_{\sqrt6}^{2\sqrt3}dy\int_0^{\sqrt{12-y^2}}dx\right)=2\left(\int_0^{\sqrt6}x\,\Big|_0^{\frac{y^2}{\sqrt6}}dy+\int_{\sqrt6}^{2\sqrt3}x\,\Big|_0^{\sqrt{12-y^2}}dy\right)=$$

$$=2\left(\int_0^{\sqrt6}\frac{y^2}{\sqrt6}dy+\int_0^{2\sqrt3}\sqrt{12-y^2}\,dy\right)=2\left[\frac{1}{\sqrt6}\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt6}+\frac12\left(y\sqrt{12-y^2}+12\arcsin\frac{y}{2\sqrt3}\right)\Big|_{\sqrt6}^{2\sqrt3}\right]=$$

$$=2\left[\frac{1}{\sqrt{\cancel{6}}}\cdot\frac{6\sqrt{\cancel{6}}}{3}+\frac12\left(2\sqrt3\cdot0+12\arcsin1-\sqrt6\sqrt6-12\arcsin\frac{\sqrt2\sqrt{\cancel{3}}}{2\sqrt{\cancel{3}}}\right)\right]=$$

$$=2\left(2+\frac12\left(12\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}-6-12\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}}\right)\right)=3\pi-2\ \ (\textit{шаршы бір.}).$$

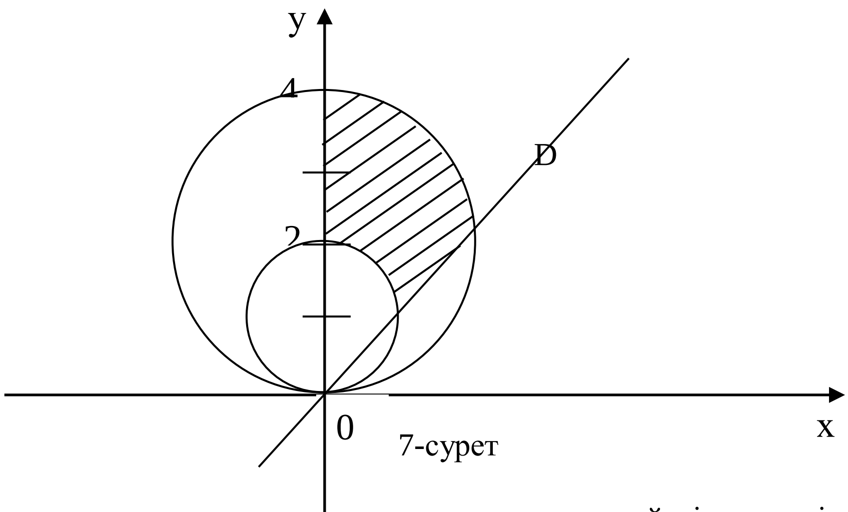
Жауабы: $S=3\pi-2$ (*шаршы бір.*).

Есеп № 6. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt3}$, $x=0$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

Шешуі. Алғашқы екі қисықтың теңдеулерін канондық түрге келтіреміз:

$$x^2+(y-2)^2=4$$
$$x^2+(y-4)^2=16$$

- 1-ші теңдеу центрі A(0,2) нүктесінде, ал радиусы R=2 болатын, 2-ші теңдеу центрі B(0,4) мен радиусы R=4 шеңберлердің теңдеулер. $y=\dfrac{x}{\sqrt3}$ - бұрыштық коэффициенті $\dfrac{1}{\sqrt3}=tg\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ тең координата бас нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі; x=0 –Oy осінің теңдеуі.



7-сурет

Фигураның ауданын полярлық координаталар жүйесіне көшіп, есептейміз: $S=\iint\limits_D\rho d\varphi d\rho$. Ол үшін $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$ $|J|=\rho$ түрлендіру формуласын қолданып,

$$x^2+y^2=4y\Rightarrow\rho^2=4\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho=4\sin\varphi.\ x^2+y^2=8y\Rightarrow\rho=8\sin\varphi$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow \rho\sin\varphi=\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}}\Rightarrow tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$$

қисықтардың полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуін аламыз.

Интегралдау шекараларын қалай алу керектігі облыстың геометриялық кескінінен көрініп тұр. φ полярлық бұрышының өзгеруі $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ түзуінен x=0 түзуінен дейін болса, осы түзулер арасынан координата бас нүктесінен басталатын кез-келген $\varphi=const$ сәулесін жүргізіп, оның облыста жататын бөлігі –кесіндінің басы $x^2+(y-2)^2=4$ шеңберінде, соңы $x^2+(y-4)^2=16$ шеңберінде екендігінен ρ полярлық радиусын өзгеру облысы көрініп тұр. Сонымен, $\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, *ал* $4\sin\varphi\le\rho\le 8\sin\varphi$.

$$x=0\Rightarrow \rho\cos\varphi=0\Rightarrow \cos\varphi=0\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}d\rho=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(64\sin^2\varphi-16\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 48\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi=24\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=12\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=12\left(\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=12\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\pi+3\sqrt{3}\ \ (\text{шаршыбір.}).$$

Жауабы: $4\pi+3\sqrt{3}$ (*шаршы бір.*).

Есеп №7. $x=\frac{1}{4}$, *y=0*, *y^2=16x*, $y\ge 0$ қисықтарымен шектелген жазық пластинканың тығыздығы $\mu=16x+\frac{9}{2}y^2$ берілсе, онда массасын табыңыз. *Шешуі.* $x=\frac{1}{4}$ - ОУ осіне параллель түзу, ал *y=0* –Ох осінің теңдеуі, *y^2=16x* – төбесі координата бас нүктесінде, симметрия осі Ох болатын парабола. Ох осінің жоғарғы жағындағы жарты жазықтық.

$$M=\iint_D\mu(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_0^{4\sqrt{x}}\left(16x+\frac{9}{2}y^2\right)dy=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(16xy+\frac{9}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{4\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(16x\cdot 4\sqrt{x}+\frac{3}{2}\cdot 64x\sqrt{x}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{4}}160x\sqrt{x}dx=160\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{5}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=$$

$$=64\cdot x^2\sqrt{x}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=64\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=2\ \left(\text{масса бір}\right).$$

Жауабы: M=2 (масса бір.).

Есеп №8. $x=17\sqrt{2y}$, $x=2\sqrt{2y}$, $z=0$, $z+y=\frac{1}{2}$ беттерімен шектелген дененің көлемін табыңыз.

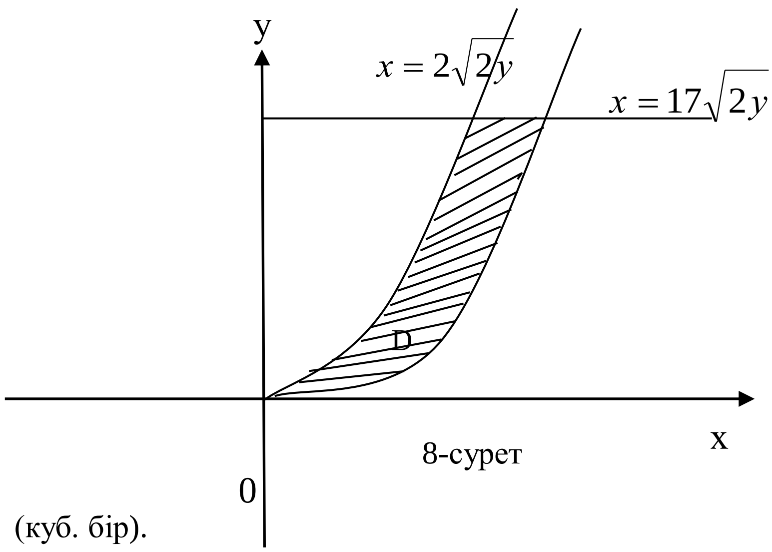
Шешуі. Алғашқы екі беттің теңдеулерінен параболалық цилиндрлі беттер екендігін көруге болады: $x=2\sqrt{2y}\Rightarrow x^2=8y\Rightarrow y=\frac{x^2}{8}$ және $x=17\sqrt{2y}\Rightarrow x^2=578y\Rightarrow y=\frac{x^2}{578}$. $z=0\Rightarrow$ Oxy жазықтығының теңдеуі. $z+y=\frac{1}{2}$ OX осіне параллель Oz және Oy осьтерінен ұзындығы $\frac{1}{2}$ -ге тең болатын кесінділер қиятын жазықтық теңдеуі. Oxy жазықтығындағы проекциясын ескеріп, дененің көлемін есептейміз.

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}\left(\frac{1}{2}-y\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-y\right)x\Big|_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}dy=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(17\sqrt{2y}-2\sqrt{2y}\right)dy=15\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-y\right)\sqrt{y}dy=$$

$$=15\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy=15\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y\sqrt{y}-\frac{2}{5}y^2\sqrt{y}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=15\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)=15\cdot\frac{2}{30}=1\ (куб.бір.).$$

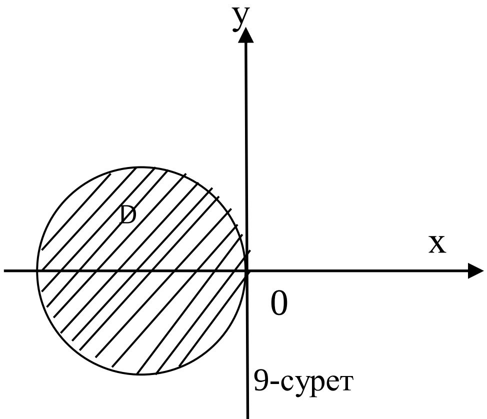


8-сурет

Жауабы: V=1 (куб. бір).

Есеп №9. $x^2+y^2+2x=0$, $z=\frac{25}{4}-y^2$, $z=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табыңыз.

Шешуі. Дене жоғары жағынан $z=\frac{25}{4}-y^2$ параболалық цилиндрлі бетпен шектелген, ал төменнен - $OXY: z=0$ координаталық жазықтығымен, бүйірінен $x^2+y^2+2x=0$- дөңгелек цилиндрімен шектелген болғандықтан, полярлық координаталарға көшіп, $x^2+y^2+2x=0$ теңдеуін түрлендіріп, $(x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow \rho^2=-2\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=-2\cos\varphi$ аламыз.



9-сурет

$V=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ формуласын қолданып, D облысы $(x+1)^2+y^2=1$ шеңбері болады. Сондықтан, төмендегі интегралдау шекарасын аламыз.

$$V=\iint\limits_{D}\left(\frac{25}{4}-y^2\right)dxdy=2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{-2\cos\varphi}\rho\left(\frac{25}{4}-\rho^2\sin^2\varphi\right)d\rho=$$

$$=2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{25}{4}\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{-2\cos\varphi}d\varphi=2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{25}{2}\cos^2\varphi-4\sin^2\varphi\cos^4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=2\left[\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi-4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^2\varphi\cdot d\varphi\right)\right]=$$

$$=2\left[\frac{25}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-4\cdot\frac{1}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2\varphi(1+\cos2\varphi)d\varphi\right]=$$

$$=2\left[\frac{25}{4}\left(\pi-\frac{\pi}{2}+0\right)-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2\varphi\cdot\cos 2\varphi d\varphi\right]=$$

$$=2\left[\frac{25\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2\varphi d\sin 2\varphi\right]=$$

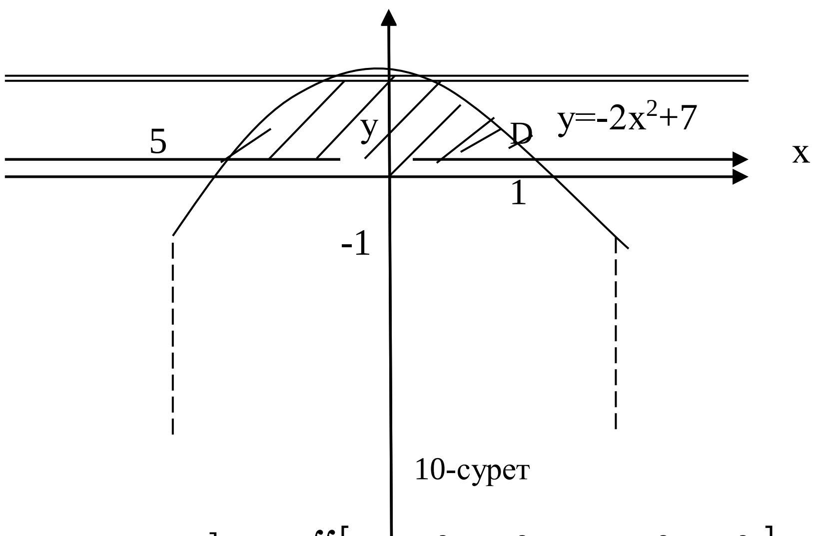
$$=2\left[\frac{25\pi}{8}-\frac{1}{4}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{\sin^3 2\varphi}{12}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]==2\left[\frac{25\pi}{8}-\frac{1}{4}\left(\pi-\frac{\pi}{2}+0\right)+0\right]=$$

$$=2\left(\frac{25\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{25\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=6\pi\quad(\text{куб.бір.})$$

Жауабы: 6π (куб.бір.).

Есеп №10. $y=-2x^2+7$, $y=5$, $z=1-2x^2+3y^2$ $z=4-2x^2+3y^2$ беттерімен шектелген дененің көлемін табыңыз.

Шешуі. Дене жоғары және төмен жағынан $z=1-2x^2+3y^2$ $z=4-2x^2+3y^2$ берілген параболоидтармен шектелген. Бүйірінен $y=5$ жазықтығымен және $y=-2x^2+7$ параболалық цилиндрлі бетпен шектелген.



10-сурет

$$V=\iint_D[z_2(x,y)-z_1(x,y)]dxdy=\iint_D[(4-2x^2+3y^2)-(1-2x^2+3y^2)]dxdy=$$

$$3\iint_D dxdy=3\cdot 2\int_0^1 dx\int_5^{-2x^2+7}dy=6\int_0^1(-2x^2+7-5)dx=6\int_0^1(-2x^2+2)dx=$$

$$=6\left(2x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=6\left(2-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{4}{3}=8(\text{куб.бір.}).$$

Алдын-ала түзу мен параболаның қиылысу нүктесін тауып,

$$\begin{cases} y = 5 \\ y = -2x^2 + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 7 = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 5 \end{cases} \end{array} \right]$$

D облысының ОУ осіне қарағанда симметриялы екендігін ескеріп, 1-ширектегі бөлігі бойынша интегралды есептеп, нәтижені 2-ге көбейтеміз.

Жауабы: V=8 (куб.бір.).